Control e Instrumentación de Procesos Químicos

Tema 2 – Dinámica de procesos

Tipos de procesos dinámicos
Funciones de transferencia
Respuesta a variaciones en la variable de entrada
Estabilidad

Introducción

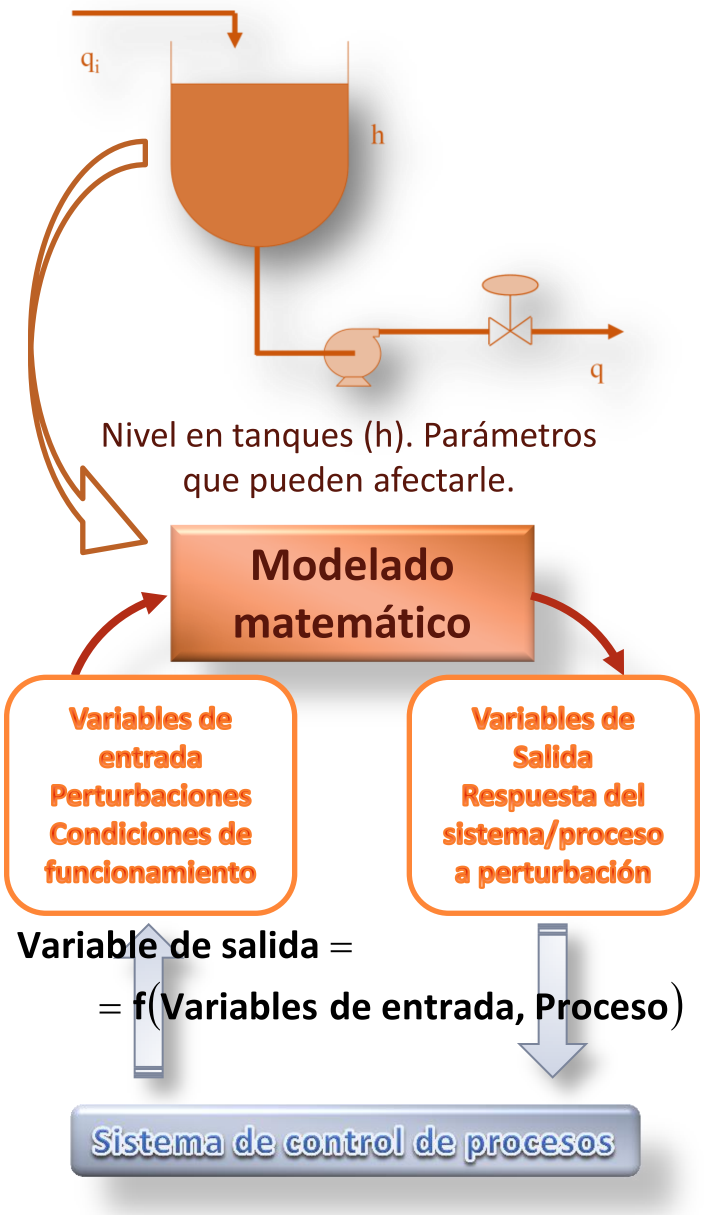
Un sistema de control de un proceso tiene por objeto mantener las variables del proceso en el valor requerido por el diseño de la instalación. Así pues el sistema de control habrá de variar un input del proceso para corregir una desviación con respecto a un punto de consigna provocada por una perturbación que afecte a la variable controlada.

Si varia el caudal de entrada, entonces hay una perturbación de la variable (en todo proceso puede haber un elevado número de perturbaciones por causas ajenas al proceso). Para prevenir las perturbaciones y sus consecuencias hay que dotar al sistema de un sistema de control. En el ejemplo del nivel para mantener el nivel constante, el operario puede abrir o cerrar la válvula de salida por lo que existen una serie de variables que han de conocerse:

Altura de líquido en el proceso. Para ello es necesario tener un sistema de medida de nivel.

Altura deseada de líquido. Es lo que se conoce como el punto de consigna. Si el valor deseado está en el mismo nivel que el valor real entonces no se lleva a cabo ninguna acción, pero si no es así debe manipularse la válvula para corregir la desviación.

Variación en el actuador. El problema aquí surge en cuánto y cómo actuar, que es en realidad el centro del problema del control para alcanzar el valor deseado. Así pues debe conocerse cómo responde el proceso ante una modificación en el sistema de control, lo que se conoce como dinámica de procesos.



Modelado matemático y dinámica de procesos

Modelo matemático. Conjunto de ecuaciones que relacionan las variables manipuladas y controladas que representan adecuadamente el comportamiento de un proceso. El modelo matemático de un proceso siempre es una aproximación de la realidad y en función del objetivo y/o del tipo de proceso va a ser distinto. La obtención de estos modelos se lleva a cabo mediante dos formas diferentes:

<u>Mediante razonamientos científicos</u> empleando leyes físicas y químicas tales como balances de materia y energía en estado no estacionario, modelos termodinámicos,… Tienen validez general y requieren un conocimiento profundo del proceso y de las leyes fisico químicas.

<u>Mediante la experimentación y análisis de datos</u>. Para ello se emplean modelos estadísticos. Tienen validez limitada al rango de valores experimentados pero no requieren conocimientos del proceso.

El resultado es una función matemática, de forma genérica diferencial, lineal o no lineal en función de su complejidad, cuya utilidad recae en la posibilidad de conocer, a través de ellos y ante una variación en un input:

La variación del output y en qué dirección

El tiempo que se tarda en alcanzar el nuevo valor

La trayectoria de la variación del output en el tiempo

Función de transferencia. Es el cociente entre la variable de salida del proceso (respuesta del modelo matemático) entre la variable de entrada del proceso (entrada del modelo matemático, perturbación,…). Generalmente, por simplicidad, se opera con funciones de transferencia en el dominio de la frecuencia que se denotan como G(s), dominio que se alcanza al aplicar la transformada de Laplace del modelo matemático en el dominio del tiempo.

$$G(s) = \frac{L\{Output\}}{L\{Input\}} = \frac{Y(s)}{M(s)}$$

Modelado matemático y dinámica de procesos

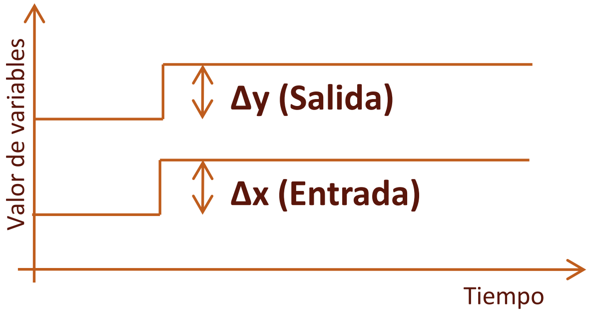
Tipos de procesos. Surgen de la diferente celeridad con que un proceso responde frente a una perturbación. Sin embargo, la celeridad es consecuencia de la presencia de factores de retardo. Se distinguen tres factores principales causantes de retardo:

Capacitancia: Se trata de la cantidad de materia o energía necesarias para realizar un cambio unitario en una variable de referencia.

Resistencia: Oposición al flujo de materia o energía. Se mide en unidades de cambio de potencial necesarias para producir la unidad de cambio de flujo. Este parámetro está presente en todos los sistemas pero es especialmente importante en las operaciones de cambio de calor.

Tiempo muerto o tiempo de transporte: Es el tiempo que ante una perturbación determinada, el sistema tarda en reaccionar. Da una idea de la inercia del proceso, es decir de la tendencia del proceso a permanecer en un estado estacionario.

Modelos Instantáneos. No muestran dinámica. La salida es inmediata y proporcional a la entrada.



$$Y(t) = K \cdot X(t)$$

$$L\{Y(t)\} = K \cdot L\{X(t)\}$$

$$G(s) = \frac{L\{Y(t)\}}{L\{X(t)\}} = \frac{Y(s)}{X(s)} = K$$

Ejemplo: Válvula de líquido (grifo)

$$K = \frac{\Delta\ Caudal}{\Delta\%\ de\ apertura}$$

Modelos de primer orden de retardo. Dinámica causada por un elemento de retardo.

$$a \cdot \frac{dy}{dt} + y = b_1 \cdot u_1 + b_2 \cdot u_2 + \cdots + b_m \cdot u_m$$

$$\tau \cdot \frac{dy}{dt} + y = K \cdot x \qquad G(s) = \frac{K}{1 + \tau \cdot s}$$

K = Ganancia estática

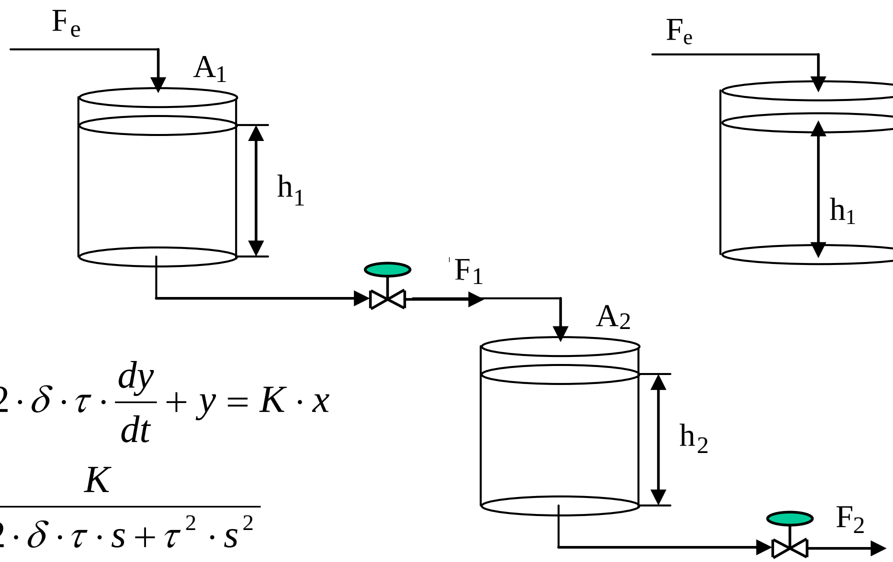
τ = Constante de tiempo

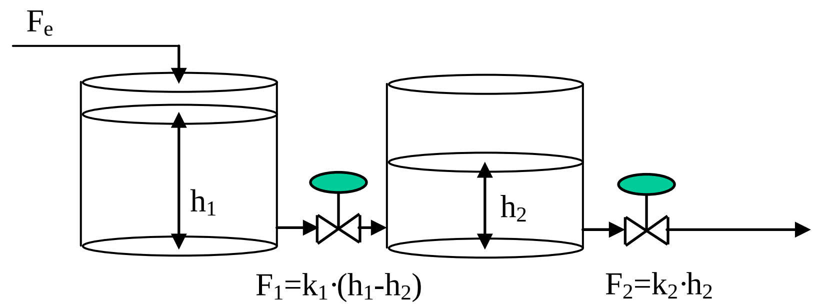
Ejemplo: Depósito de líquidos

$$\frac{A}{k} \cdot \frac{dh}{dt} + h = \frac{1}{k} \cdot F_E$$

Modelado matemático y dinámica de procesos

Sistemas de segundo orden de retardo. Surgen de la presencia de dos factores de retardo en serie, o bien interactuando cada uno de ellos (intrínsecos).





$$\tau^2 \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \cdot \delta \cdot \tau \cdot \frac{dy}{dt} + y = K \cdot x$$

$$G(s) = \frac{K}{1 + 2 \cdot \delta \cdot \tau \cdot s + \tau^2 \cdot s^2}$$

$$\frac{1}{\varpi_n^2} = \tau_1 \cdot \tau_2 \therefore \qquad \frac{2 \cdot \delta}{\varpi_n} = \tau_1 + \tau_2$$

$$Kp = k_1 \cdot k_2$$

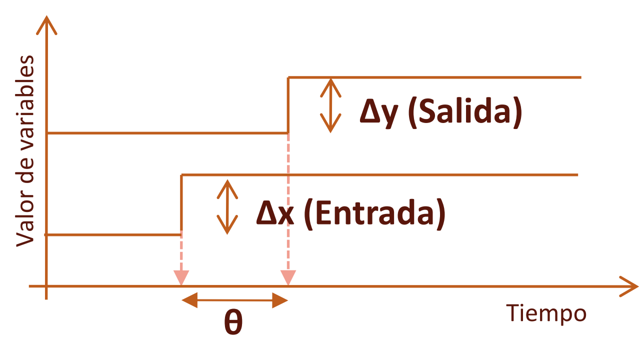
$$\varpi_n = Frecuencia\ natural$$

$$\delta = Coeficiente\ de\ amortiguamiento$$

Tiempo muerto. Se define el tiempo muerto como el tiempo durante el cual no se observa variación en un proceso o respuesta ante un cambio en la variable de entrada. El tiempo muerto está relacionado con el transporte de materia o de energía. La mayoría de los procesos pueden ser modelados dinámicamente mediante diferentes combinaciones de capacidades (sistemas de primer orden) y tiempo muerto.

$$y(t) = u(t - \theta)$$

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \exp\{-\theta \cdot s\}$$



Modelado matemático y dinámica de procesos

Sistemas multicapacitivos. Sistemas de una o varias capacidades en serie. Los sistemas son tanto o más sobreamortiguados cuanto mayor sea el número de capacidades.

$$a_n \cdot \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \cdot \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \cdot \frac{dy}{dt} + y = b_1 \cdot u_1 + b_2 \cdot u_2 + \cdots + b_n \cdot u_n$$

Funciones de transferencia. Relación entre las variables de entrada y salida de un determinado proceso (aplicable a modelos matemáticos). Suelen emplearse en el domino de la frecuencia.

$$a_n \cdot \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \cdot \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \cdot \frac{dy}{dt} + y = b_m \cdot \frac{d^m u}{dt^m} + b_{m-1} \cdot \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \cdots + b_1 \cdot \frac{du}{dt} + b_0 \cdot u$$

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{b_m \cdot s^m + b_{m-1} \cdot s^{m-1} + \cdots + b_1 \cdot s + b_0}{a_n \cdot s^n + a_{n-1} \cdot s^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot s + a_0}$$

Definiciones. Algunos parámetros importantes de las funciones de transferencia son:

<u>Polos</u>: Son los puntos de solución del denominador (ceros del denominador).

<u>Ceros</u>: Son los puntos de solución del numerador (ceros del numerador).

<u>Ganancia estática</u>: Se refiere al valor de la constante que se obtiene haciendo s=0.

El producto de dos funciones de transferencia es igual que considerar dos sistemas con diferentes funciones de transferencia como un único proceso.

Respuesta a variaciones en la variable de entrada

Diagrama de bloques. Permiten representar gráficamente el flujo de información en un modelo matemático y su integración con otros procesos y/o variables, tanto en la entrada como en la salida.

Variable de entrada (x(s)) → **Función de transferencia G(s)** → **Variable de salida (y(s))**

Para alimentar la función de variable de entrada a la función de transferencia, es necesaria su transformación previa con Laplace.

Respuesta a perturbación en escalón. Función de Heaviside (H).

Particularización en modelos de primer orden:

$$x(t)=\begin{cases}\bar{x} & t<0\\ \bar{x}+\Delta\bar{x} & t>0\end{cases}$$

$$x(s)=L\{x(t)\}=\frac{\Delta x}{s} \Rightarrow L\{y(t)\}=\frac{\Delta x}{s}\cdot\frac{K}{1+\tau\cdot s}=\frac{\Delta x\cdot K}{(1+\tau\cdot s)\cdot s} \Rightarrow y(t)=K\cdot\Delta x\cdot\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

Respuesta a perturbación en pulso. Función delta de Dirac (δ).

Particularización en modelos de primer orden:

$$x(t)=\begin{cases}0 & t<0;\, t>0\\ 1 & t=0\end{cases}$$

$$x(s)=L\{x(t)\}=1 \Rightarrow L\{y(t)\}=\frac{K}{1+\tau\cdot s} \Rightarrow y(t)=\frac{K}{\tau}\cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Respuesta a variaciones en la variable de entrada

Respuesta frecuencial. Una respuesta será, de forma habitual frecuencial, cuando se ve perturbado por una entrada sinusoidal. Independiente del tipo de proceso del que se trate, siempre se tiene:

$$x(t) = x_0 \cdot Sen(\omega \cdot t) \quad \Rightarrow \quad y(t) = y_0 \cdot Sen(\omega \cdot t + \varphi)$$

Donde y_0 y φ varían con el tipo de proceso. Para su cálculo se sustituye G(s) por G(ω·i), obteniéndose un número complejo de donde se extrae el módulo y el argumento, que se relacionan con entrada y salida de la siguiente forma:

$$A \cdot \exp(-\varphi \cdot i) = a + b \cdot i$$

$$módulo = A = \sqrt{a^2 + b^2} = \left(\frac{y_0}{u_0}\right) \qquad Argumento = \varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) = desfase$$

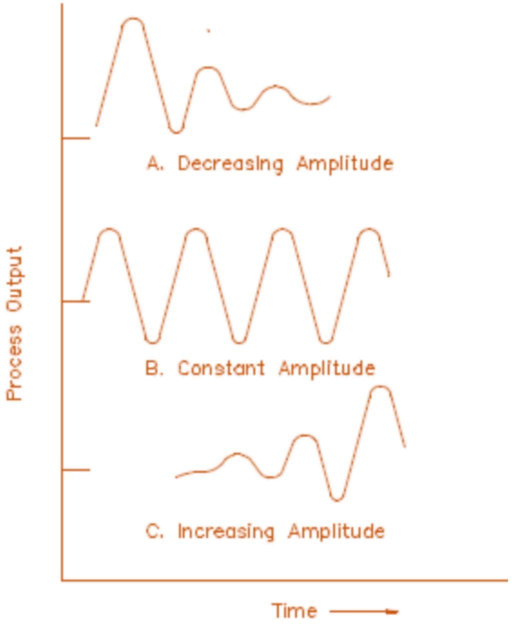
$$M = \frac{A}{K} = \frac{y_0}{u_0} \cdot \frac{1}{K}$$

Respuesta a variaciones en la variable de entrada

Tipo de proceso	Ecuación diferencial que lo describe	Función de transferencia	Respuesta a perturbación en escalón	Respuesta frecuencial
Instantáneo	$y(t)=K\cdot x(t)$	$G(s)=K$	$\Delta y(t)=K\cdot\Delta\bar{x}$	$M=1 \varphi=0$
Primer orden de retardo	$\tau\cdot\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=K\cdot x(t)$	$G(s)=\frac{K}{1+\tau\cdot s}$	$\Delta y(t)=K\cdot\Delta\bar{x}\cdot\left(1-\exp\left(-t/\tau\right)\right)$	$M=\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2\cdot t^2}}$ $\varphi=\arctan(\omega\cdot t)$
Segundo orden de retardo (intrínseco)	$\tau^2\cdot\frac{d^2y(t)}{dt^2}+2\cdot\delta\cdot\tau\cdot\frac{dy(t)}{dt}+$ $+y(t)=K\cdot x(t)$	$G(s)=\frac{K}{1+2\cdot\delta\cdot\tau\cdot s+\tau^2\cdot s}$	Para δ=1 (críticamente amortiguado) $\Delta y(t)=K\cdot\Delta\bar{x}\cdot\left(1-\exp\left(-t/\tau\right)\cdot\left(1+t/\tau\right)\right)$ Para δ<1 (subamortiguado) $\Delta y(t)=K\cdot\Delta\bar{x}\cdot\left(1+\frac{\exp\left(-\delta\cdot t/\tau\right)}{\sqrt{1-\delta^2}}\cdot \cdot Sen\left(t/\tau\cdot\sqrt{1-\delta^2}-\varphi\right)\right)$ $\varphi=\arctan\left(\frac{\sqrt{1-\delta^2}}{-\delta}\right)$	$M=\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2+ +4\cdot\delta^2\cdot\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$ $\varphi=\arctan\left(\frac{2\cdot\delta\cdot\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\right)$
Tiempo muerto	$y(t)=u(t-\theta)$	$G(s)=\exp(-\theta\cdot s)$	$y(t)=u(t-\theta)$	$M=1$ $\varphi=-\theta\cdot\omega$

Estabilidad

Criterios de estabilidad. La estabilidad de un sistema se demuestra matemáticamente mediante la descomposición en fracciones de la función de transferencia G(s) y hallando la transformada inversa de Laplace. En realidad un sistema es estable cuando, ante una entrada limitada (no infinitamente creciente) la respuesta del sistema es limitada. Para ello todos los polos de la función de transferencia de dicho sistema (raíces del denominador) han de tener una parte real negativa. El problema principal es que la resolución de los polinomios de alto grado suele ser laborioso. Por ello, Routh desarrolló un método o criterio que permite determinar si un sistema es estable o no. El criterio de Routh es un método numérico que permite determinar el número de polos inestables en un polinomio dado. En este método se genera una tabla en la que los cambios de signo en la primera columna revelan el número de polos inestables. Este método también es usado en función de parámetros por lo que permite determinar rangos de estabilidad para un parámetro K.



$$a_n \cdot s^n + a_{n-1} \cdot s^{n-1} + a_{n-2} \cdot s^{n-2} \cdots + a_2 \cdot s^2 + a_1 \cdot s + a_0 = 0$$

a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	a_{n-6}	……
a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	a_{n-7}	……
A_1	A_2	A_3	……	……
B_1	B_2	B_3	……	……
C_1	C_2	……	……	……
D_1	D_2	……	……	……

$$A_1 = \frac{[a_{n-1} \cdot a_{n-2}] - [a_n \cdot a_{n-3}]}{a_{n-1}}$$

$$A_2 = \frac{[a_{n-1} \cdot a_{n-4}] - [a_n \cdot a_{n-5}]}{a_{n-1}} \ldots .etc$$

$$B_1 = \frac{[A_1 \cdot a_{n-3}] - [a_{n-1} \cdot A_2]}{A_1}$$

$$B_2 = \frac{[A_1 \cdot a_{n-5}] - [a_{n-1} \cdot A_3]}{A_1} \ldots .etc$$

$$C_1 = \frac{[B_1 \cdot A_2] - [A_1 \cdot B_2]}{B_1}$$

$$C_2 = \frac{[B_1 \cdot A_3] - [A_1 \cdot B_3]}{B_1} \ldots .etc$$

Bibliografía

Título	Process dynamics and control
Autor	D.E. Seborg, T.F. Edgar, D.A. Mellichamp
Editorial	Wiley, ISNB: 978-0-471-00077-8. 2003.

Título	A real time approach to process control
Autor	William Y. Svrcek
Editorial	Wiley, ISBN: 978-0-470-02534-4. 2006